Séries de Taylor

Exemplo 1: Encontre a série de Taylor da função $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ em torno de $a = 0$.

Solução: Primeiramente vamos calcular $f(0)$ e as derivadas de $f(x)$ no ponto $a = 0$.

$$f(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1 \\
f''(x) &= (-2) \times \frac{-1}{(1+x)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2 \\
f'''(x) &= (-3) \times \frac{2}{(1+x)^4} \Rightarrow f'''(0) = -\frac{3!}{(1+0)^4} = -3! \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 2 \times 1}{(1+x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = (-1)^n n! \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Agora vamos usar a fómula da expansão em séries de Taylor:

$$[colback = cambridgeblue!\,40] f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x$$

Substituindo os valores $f(0)$, $f'(0), \ldots$ na fórmula acima, temos:

$$f(x) = 1 + (-1)(x-0) + \frac{2}{2}(x-a)^2 + \frac{-3!}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{(-1)n!}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Portanto:

$$[colback = cambridgeblue!\,40] \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Nota: Note que a soma à direita na expansão acima é uma série geométrica com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = -x$. Então, se usarmos a fórmula

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

do limite da soma dos termos de uma PG infinta, chegaremos ao mesmo resultado.

Devemos agora encontrar o intervalo de convergência desta expansão.

Usando o critério já estudado, temos que a série de potências de $(x-a)$ converge nos valores de x tais que $|x-a|< R$, onde $R = 1/L$ e L é definido por

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Na expansão acima temos que

$$f(x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

então $a_n = (-1)^n$, assim é imediatdo que

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

portanto a expansão acima converge no intervalo $(-1, 1)$ restando apenas analisar a convergência nos extremos do intervalo.

- ***x*=−1**: Em $x = -1$ a série fica

$$1 - (-1) + (-1)^2 - (-1)^3 + \cdots + (-1)^n(-1)^n + \ldots$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \ldots$$

  que é obviamente uma série divergente.

- ***x*=1**: Em $x = 1$ a série fica

$$1 - (1) + (-1)^2 - (1)^3 + \cdots + (-1)^n(1)^n + \ldots$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots (-1)^n + \ldots$$

  que é uma série divergente.

  Assim, temos que o domínio (ou intervalo) de convergência da série é $I = (-1, 1)$.

Exemplo 2: Encontre a série de Taylor da função $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$ em torno de $a = 0$.

Solução: Neste caso o cálculo das derivadas de $f(x)$ seria muito trabalhoso, mas não será necessário. Se substituirmos x por $-x$ na expansão da questão anterior temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+(-x)} &= 1 - (-x) + (-x)^2 - (-x)^3 + \cdots + (-1)^n(-x)^n + \ldots \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots \end{aligned}$$

Agora multiplicando ambos os membros da equação por x^2 temos:

$$[colback = cambridgeblue!\,40]\frac{x^2}{1-x} = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^{n+2} + \ldots$$

Tópicos em Séries de Taylor I

Na última *Gota de Matemática* deduzimos a expansão em séries da função $\frac{1}{1+x}$, a saber

$$[colback = cambridgeblue!\,40]\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Nesta e nas próximas notas vamos fazer algumas manipulações de modo a calcular somas interessantes, calcular integrais de funções que não possuem primitivas, entre outras aplicações.

Considere o problema:

Exercício

Calcule o valor de S, onde S é dado por

$$S = 1 - \frac{2}{e} + \frac{3}{e^2} + \cdots + (-1)^n \frac{n+1}{e^n} + \ldots$$

Solução: Para resolver este problema, temos que "advinhar" a série usada para gerar esta soma, ou seja, a série onde substituímos $x = e$ ou $x = \dfrac{1}{e}$ para chegar a esta soma.

Note que reescrevendo a soma acima temos:

$$S = 1 - 2e^{-1} + 3e^{-2} + \cdots + (-1)^n (n+1) e^{-n} + \ldots$$

mas, afim de escrevermos esta soma em termos de potências de e, vamos rwescrever a soma acima na seguinte forma

$$S = 1 - 2e^{-1} + 3(e^{-1})^2 + \cdots + (-1)^n (n+1)(e^{-1})^n + \ldots \qquad (*)$$

Ah! Agora sim, note que agora esta soma nos lembra a derivada da série de $\frac{1}{1+x}$. Vejamos. Derivando a expansão em série de $\frac{1}{1+x}$, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1+x}\right)' &= \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \ldots\right)' \\ -\frac{1}{(1+x)^2} &= -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + (-1)^{n+1}(n+1)x^n + \ldots \end{aligned}$$

Note que na expansão acima escrevemos um termo a mais afim de deixar claro o procedimento,

ARRASTE PARA O LADO

(Continuação...)

Multiplicando ambos os membros da última equação, temos:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \dots + (-1)^{n+1}(n+1)x^n + \dots$$

Assim a série obtida tem a "cara" da soma em (*).
Substituindo x por e^{-1} na série acima, temos:

$$\frac{1}{(1+e^{-1})^2} = 1 - 2e^{-1} + 3(e^{-1})^2 + \dots + (-1)^{n+1}(n+1)(e^{-1})^n + \dots$$

Mas note que a última soma obtida é exatamente a soma em (*), que é a soma desejada. Então. após as manipulações algébricas necessárias, temos:

$$[colback = cyan!20, droplifted shadow, sharp corners] S = 1 - \frac{2}{e} + \frac{3}{e^2} + \dots + (-1)^n \frac{n+1}{e^n} + \dots = \frac{e^2}{(e+1)^2}$$

Estudo Dirigido Sobre Séries de Potências

Marcos Paizante

marcospaizante@gmail.com

Algumas séries usuais

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{3}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots \ , \ |x| \leq 1 \tag{4}$$

Seção

1. Derive a série em (17) e verfique que $(\cos x)' = \sin x$.
2. Substitua x por $-x$ e encontre uma representação em série para $y = \dfrac{1}{1+x}$.
3. Integre termo a termo a série encontrada no exercício anterior e encontre uma representação em série para $y = \ln(1+x)$.
4. **Representação em séries para** $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$
   (a) Integre a série em (19) e encontre uma representação em séries para $\ln(1-x)$.
   (b) Usando a propriedade
   $$\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$$
   subtraia termo a termos as séries de $\ln(1+x)$ e $\ln(1-x)$ e encontre a série desejada.
5. Substitua x por $-x^2$ em (19) e contre uma representação em séries para a função $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.
6. Integre termo a termo a série encontrada no exercício anterior e encontre uma representação em séries para a função $y = \arctan x$.
7. Susbstitua x por $-x$ na série em (16) e encontre uma representação em séries para $y = e^{-x}$.
8. **Cosseno e seno hiperbólicos.** Defini-se *cosseno hiperbólico* e *seno hiperbólico* por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(a) Some termo a termo as séries em (16) e a obtida no exercício anterior e depois divida por dois todos termos do resultado obtido e encontre uma representação em série para $y = \cosh x$.

(b) Faça um procedimento análogo para obter uma representação em série para $= \sinh x$.

9. Substitua x por $\dfrac{x}{r}$ e após algumas manipulações algébricas, encontre uma representação em séries para $y = \dfrac{1}{x - r}$.

10. Enconte uma representação em séries para $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

    (a) Decomponha a expressão de y em frações parciais.

    (b) Encontre as séries de cada fração obtida no item anterior.

    (c) Some termo a termo as séries.

Equação Differencial do Dia

Marcos Paizante - @paizantemarcos

Introdução

Nesta nota vamos encontrar a solução geral de uma **equação diferencial separável** e depois analisar o comportamento desta solução para diferentes condições iniciais.

Exercício

Encontre a solução geral de

$$y' = \frac{1}{2}t(1-y^2) \ .$$

Solução:: Vamos começar separando as variáveis:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}t(1-y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{2}t(y^2-1) \\ \frac{2}{y^2-1}\ dy &= -t\ dt \\ \int \frac{2}{y^2-1}\ dy &= -\int t\ dt \end{aligned}$$

A integral no segundo membro da equação é trivial, enquanto que a integral no primeiro membro se resolve, evidentemente, pelo *método das frações parciais*, assunto que foi exaustivamente tratado no Instagram do professor Marcos Paizante - @paizantemarcos - portanto vamos omitir os detalhes dessa decomposição, note que

$$\frac{2}{y^2-1} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}$$

então temos:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2}{y^2-1}\,dy = \int \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] dx &= -\frac{t^2}{2} + c \\
\ln|y-1| - \ln|y+1| &= -\frac{t^2}{2} + c
\end{aligned}
$$

usando a propriedade $\ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$, temos:

$$
\begin{aligned}
\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| &= -\frac{t^2}{2} + c \\
\left|\frac{y-1}{y+1}\right| &= e^{-\frac{t^2}{2}+c} \\
\left|\frac{y-1}{y+1}\right| &= e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \cancel{e^{c}}C
\end{aligned}
$$

Desde que $y \neq \pm 1$ no intervalo de discussão, a quantidade dentro do módulo é sempre positiva, portanto podemos suprimir omódulo

$$
\begin{aligned}
y-1 &= C(y-1)e^{-\frac{t^2}{2}} \\
y-1 &= Cye^{-\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \\
y - Cye^{-\frac{t^2}{2}} &= 1 + Ce^{-\frac{t^2}{2}} \\
y\left(1 - Ce^{-\frac{t^2}{2}}\right) &= 1 + Ce^{-\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}
$$

e, finalmente, temos:

$$
y(t) = \frac{1 + Ce^{-\frac{t^2}{2}}}{1 - Ce^{-\frac{t^2}{2}}}
$$

Breve Discussão Sobre Dependência das Condições Iniciais

Note que se tivermos a condição inicial $y(0) = A$, temos:

$$\begin{aligned}
y(0) = A &= \frac{1 + Ce^{-\frac{0^2}{2}}}{1 - Ce^{-\frac{0^2}{2}}} \\
A &= \frac{1 + C}{1 + C} \\
A + AC &= 1 + C \\
AC - C &= 1 - A \\
C &= \frac{1 - A}{1 + A}
\end{aligned}$$

- Se $y(0) = 1$, temos que $C = 0$ o que implica em uma solução **constante**

$$y(t) = 1$$

- Se $y(0) = 0.5$, temos $C = \frac{1}{3}$, assim

$$y(t) = \frac{1 + \frac{1}{3}e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 - \frac{1}{3}e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

- E, se $y(0) = -0.5$, temos $C = 3$, portanto:

$$y(t) = \frac{1 + 3e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 - 3e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

Siga o Instagram: @paizantemarcos

Gotícula de Matemática

Marcos Paizante - @paizantemarcos

Soluções Particulares de Uma EDO Linear de Segunda Ordem

Método dos Coeficientes a Determinar

Seja a seguinte EDO inear de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes.

$$y'' + by' + cy = f(t)$$

Sabemos que a solução desta EDO é da forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

onde $y_h(t)$ é a **solução homogênea** e $y_p(t)$ é a **solução particular**.
Os cálculos das soluções homogênea através do polinômio característico da equação e as formas das soluções particulares, que são escolhidas a partir de uma tabela e cuja forma depende da funçã]o $f(t)$, já foram abordadas em *gotas de matemática* anteriores e também na **Apostila de EDO** do professor Marcos Paizante.
Na nota de hoje vamos em busca da solução de uma EDO Linearde segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes da seguinte forma:

$$y'' + by' + cy = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_k(t) \qquad (*)$$

Sendo as funções $f_1(t), f_2(.), \ldots, f_k(t)$ **linearmente independentes**, temos que a solução geral da equação $(*)$ é da forma

$$y(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) + \cdots + y_{p_k}(t)$$

onde as formas das soluções particulares y_{p_i}, $i = 1, \ldots, k$, são escolhidas a partir da função $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$ associada.
Vejamos um exemplo:

ARRASTE PARA O LADO

Exercício: Resolva o PVI:

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 4y = 6e^{-t} + 4t^2 \\ y(0) \ = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

<u>*Solução*</u>: Sabemos da explicação da página anterior, que solução geral desta EDO será da forma

$$y(t) = y_h(t) + y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) \qquad (**)$$

onde a solução particular $y_{p_1}(t)$ será associada à função $6e^{-t}$ e a solução particular $y_{p_2}(t)$ será associada à função $4t^2$.
Vamos primeiramente encontrar a solução homogênea.
O polinômio característico desta equação é

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

cujas raízes são $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = -1$. Assim a solução homogênea desta equação será:

$$y_h(t) = C_1e^{-4t} + C_2e^{-t} \ .$$

Jáas soluções particulares serão das seguintes formas:

$$y_{p_2} = ax^2 + bx + c \ .$$

Note que pelo fato de haver um termo do segundo grau no no lado direito da EDO, **a solução particular deve ser um polinômio do segundo grau**. Já a soluçõ y_{p_1} será da forma:

$$y_{p_1}(t) = Cte^{-t} \ .$$

Note que tivemos que multiplicar por t a função Ce^{-t} pelo de fato de a solução e^{-t} já estar presente na solução homogênea, então devemos buscar uma solução particular que seja **LI** com uma solução já existente.
Agora vamos usar o *método dos coeficientes a determinar* para encontrar as soluções particulares.

$$y'_{p_2} = 2ax + b \ , \ y''_{p_2} = 2a$$

substituindo as derivadas acima na EDO, temos:

$$\begin{aligned} 2a + 5(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) &= 4x^2 \\ 4ax^2 + (10a + 4b)x + (5b + 4c) &= 4x^2 \end{aligned}$$

que nos leva ao sistema

$$\begin{cases} 4a & = 4 \\ 10a + 4b & = 0 \\ 2a + 5b + 4c & = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $a = 1$, $b = -5/2$ e $c = 21/8$, portanto, a solução particular $y_{p_2}(t)$ será:

$$y_{p_2}(t) = x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{21}{8} \ .$$

Agora vamos encontrar a solução $y_{p_1}(t)$. Calculemos $y'_{p_1}(t)$ e $y''_{p_1}(t)$.

$$\begin{aligned}
y'_{p_1}(t) &= Ce^{-t} - Cte^{-t} \\
y'_{p_1}(t) &= (C - Ct)e^{-t} \\
y''_{p_1}(t) &= -Ce^{-t} - Ce^{-t} + Cte^{-t} \\
y''_{p_1}(t) &= (-2C + Ct)e^{-t}\ .
\end{aligned}$$

E agora vamos substituir os resultados encontrados na EDO.

$$\begin{aligned}
(-2C + Cte^{-t}\ + 5(C - Ct)e^{-t} + 4Cte^{-t} &= 6e^{-t} \\
-2Ce^{-t} + Cte^{-t} + 5Ce^{-t} - 5Cte^{-t} + 4Cte^{-t} &= e^{-t} \\
3Ce^{-r} &= 6e^{-t}
\end{aligned}$$

Donde concluímos que

$$3C = 6 \ \Rightarrow\ C = 2.$$

Potyanto, de acordo com (**) a solução geral da EDO será:

$$y(t) = C_1e^{-4t} + C_2e^{-t} + 2e^{-t} + x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{21}{8}\ ,$$

Agora vamos usar as condições iniciais para encontrar as constantes C_1 e C_2.
De $y(0) = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
y(0) &= C_1e^{-4\times 0} + C_2e^{-0} + 0^2 - \frac{5\times 0}{2} + \frac{21}{8} = 0 \\
& C_1 + C_2 = -\frac{21}{8} \qquad (1)
\end{aligned}$$

E de $y'(0) =$, temos:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= -4C_1e^{-4t} - C_2e^{-t} + 2e^{-t} - 2te^{-t} + 2t - \frac{5}{2} = 1 \\
y'(0) &= -4C_1e^{-4\times 0} - C_2e^{-0} + 2e^{-0} - 2\times 0e^{-0} + 2\times 0 - \frac{5}{2} = 1 \\
& -4C_1 - C_2 = \frac{3}{2} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (1) por 4 e devido a equação (2), temos o sistema

$$\begin{cases} 4C_1 + 4C_2 = -\dfrac{21}{2} \\ -4C_1 - \ C_2 = \ \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

cuja solução é: $C_1 = \dfrac{11}{8}$ e $C_2 = -3$. Portanto, a solução da EDO será:

$$y(t) = \frac{3}{8}e^{-4t} - 3e^{-t} + 2te^{-t} + t^2 - \frac{5t}{2} + \frac{21}{8}$$

e, agrupando os termos com e^{-t}, finalmente, temos:

$$y(t) = \frac{3}{8}e^{-4t} + (2t - 3)e^{-t} + t^2 - \frac{5t}{2} + \frac{21}{8}$$

Equação Differencial do Dia

Marcos Paizante - @paizantemarcos

Nesta nota vamos resoler uma EDO de segunda com coeficientes constantes e não homogenea. Para encontar a solução particular vamos usar o *método dos coeficientes a determinar.*

Exercício: Resolva o PVI

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2t^2 - 7 \\ y(0) = \ , \ y'(0) = \end{cases}$$

Fatos que ajudam:

- O polinômio característica de uma EDO de segunda com coeficientes constantes

$$y'' + by' + cy = 0$$

é:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \ .$$

- A solução homogenea de uma EDO de segunda com coeficientes constantes é dada de acordo com a natureza das raízes do polinômio característico:
  - Se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_1 t} \ .$$

  - Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

$$y(t) = (C_1 + C_2 t e^{\lambda t} \ .$$

  - Se $\lambda_{1,2} = a \pm bi \ \in \mathbb{C}$

$$y(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \operatorname{sen}(bt) \ .$$

- A solução particular de uma EDO de segunda com coeficientes constantes não homoegenea $y'' + by' + cy = g(t)$, é dada de acordo com a natureza da função $g(t)$.

Solução: Primeiramente devemos encontrar a solução homgenea $y_h(t)$. O polinômio característico dessa equação é:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \ ,$$

cujas raízes são: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$. Como esta raízes são **reais e diferentes**, temos que a solução homgenea $y_h(t)$ é:

$$y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$$

Já a solução particular $y_p(t)$ será da forma

$$y_p(t) = at^2 + bt + c \ ,$$

pois a parte não homogena da EDO é um polinônimo do segundo grau, ainda que incompleto. Assim, temos:

$$y_p'(t) = 2at + b \qquad \text{e} \qquad y_p''(t) = 2a \ .$$

Substituindo as expressões de $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na EDO, temos:

$$\begin{aligned} 2a + 2at + b - 2(at^2 + bt + c) &= 2t^2 \\ 2a + 2at + b - 2at^2 - 2bt - 2c &= 2t^2 \\ -2at^2 + (2a - 2b)t + 2a + b - 2c &= 2t^2 \end{aligned}$$

igualando termo a termos o polinônimos na última equação acima, temos o seguinte sistema de quaçãoes:

$$\begin{cases} 2a + b - 2c = -7 \\ 2a - 2b \quad\ = \ 0 \\ -2a \qquad\quad = \ 2 \end{cases}$$

Cuja solução é fácil de se obter, e é: $a = -1$, $b = -1$ e $c = 2$. Portanto a solução particular desta EDO é:

$$y_p(t) = -t^2 - t + 2$$

A solução geral geral da EDO é dada por $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$. Então a solução geral da EDO é:

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t - t^2 - t + 2$$

Agora vamos usar as condições iniciais $y(0)$ e $y'(0)$ para ajustar as constantes C_1 e C_2.

$$\begin{aligned} y(0) = C_1 \cancel{e^{-2(0)}}^1 + C_2 \cancel{e^0}^1 - 0^2 - 0 + 2 &= 5 \\ C_1 + C_2 &= 3 \end{aligned}$$

Cálculo de $y'(t)$:

$$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^t - 2t - 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} y'(0) = -2C_1 \cancel{e^{-2(0)}}^1 + C_2 \cancel{e^0}^1 - 2(0) - 0 &= 0 \\ -2C_1 + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Assim chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -2C1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é: $C_1 = 1$ e $C_2 = 2$. Portanto, finalmente, chegamos a seguinte solução solução:

$$y(t) = e^{-2t} + 2e^t - 2t - 1 \ .$$

ANPEC Questão por Questão

Marcos Paizante - Instagram: @paizantemarcos

Nesta nota vamos resolver a questão número 14 da prova de matemática do último concurso da ANPEC. Trata-se de resolver um sistema de equações à diferenças, e depois calcular um limite, portanto os assuntos relacionados a essa questão são: sistemas de equações à diferenças e limites de funções de uma variável real.

Exercício

Considere o sistema de equações em diferenças dado por

$$x_{t+1} = -4x_t + 5y_t$$
$$y_{t+1} = -2x_t + 3y_t \ ,$$

sendo $t = 0, 1, 2, 3, \dots$. Sabe-se que $x_0 = 4$ e $y_0 = 1$. Encontre 4L em que $\mathrm{L} = \lim_{t\to\infty} \frac{x_t}{1+y_t}$.

Fatos que ajudam:

- A solução do sistema de equação à diferenças

$$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$$

com condição inicial $\mathrm{X}_0 = X_0$ é dada por:

$$\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n X_0$$

- A potência A^n de uma matriz diagonalizável A pode ser calculada pela expressão

$$\mathrm{A}^n = P\mathrm{D}^n P^{-1}$$

onde D é a matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são os autovalores de A e P é a matriz de transformação de similaridade, que é a matriz cujas colunas são os autovetores de A.

ARRASTE PARA O LADO

Solução:

Primeiramente, escrevendo os sistema na forma $X_{t+1} = AX_t$, temos que a matriz A é

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

A fim de calcular a matriz A^n devemos inicialmente encontrar os autovalores da matriz A resolvendo a equação

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

onde I é a matriz identidade. Então:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 4 & -5 \\ 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

Assim

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -5 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 3) + 10 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Cujas raízes são: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$. Como os autovalores são **reais e diferentes**, os autovetores desta matriz são **linearmente independentes**, portanto a matriz A é **diagonalizável**, e sua matriz diagonal é:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O cálculo da n-ésima potência de uma matriz diagonal é muito simples, basta elevar os elementos da diagonal principal a n, ou seja,

$$D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora devemos encontrar os autovetores de A através da solução da equação

$$Av = \lambda v$$

- $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  que nos leva so sistema

$$\begin{cases} -4x + 5y = -2x \\ -2x + 3y = -2y \end{cases}$$

  cuja solução é dada pela reta $5y = 2x$, portanto os autovetores associados ao autovalor -2 são da forma

$$\begin{pmatrix} 5t \\ 2t \end{pmatrix}$$

  assim o vetor $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ é um autovetor da matriz A associado a $\lambda_1 = -2$.

- $\lambda = 1$:
$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
que nos leva so sistema
$$\begin{cases} -4x + 5y = x \\ -2x + 3y = y \end{cases}$$
cuja solução é dada pela reta $y = x$, portanto os autovetores associados ao autovalor -2 são da forma
$$\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$
assim o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = 1$.

portanto a matriz P é dada por:
$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Cuja inversa é dada por:
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{Confira!}$$
Então, usando o segundo *fato que ajuda*, temos:
$$A^n = P\mathrm{D}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$
que nos fornece:
$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{5 \cdot (-2)^n - 2}{3} & -\dfrac{5 - 5 \cdot (-2)^n}{3} \\ \dfrac{2 \cdot (-2)^n - 2}{3} & \dfrac{5 - 5 \cdot (-2)^n}{3} \end{pmatrix}$$

Multiplicando a matriz A^n pelo vetor $X_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, temos:
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5 \cdot (-2)^n - 2}{3} & -\dfrac{5 - 5 \cdot (-2)^n}{3} \\ \dfrac{2 \cdot (-2)^n - 2}{3} & \dfrac{5 - 5 \cdot (-2)^n}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donde temos:
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(-2)^n - 1 \\ 2(-2)^n - 1 \end{pmatrix} ,$$

portanto: $x_t = 5(-2)^t - 1$ e $y_t = 2(-2)^t - 1$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L} &= \lim_{t\to\infty} \frac{x_t}{1+y_t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{5(-2)^t - 1}{1 + 2(-2)^t - 1} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{5(-2)^t - 1}{2(-2)^t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{5\cancel{(-2)^t}}{2\cancel{(-2)^t}} - \cancelto{0}{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2(-2)^t}} \right]
\end{aligned}
$$

portanto: $\mathrm{L} = \dfrac{5}{2}$. Assim, $4\mathrm{L} = 4 \cdot \dfrac{5}{2} = 10$.